



波现象与智能反演成像研究组

数据分析 (Learning From Data) 的基本逻辑

报告人：王华忠

波现象与智能反演成像研究组 (WPI)

同济大学海洋与地球科学学院，上海

2024年11月05日

目录

- ◆ **一、概述**
- ◆ **二、数据分析的基本逻辑**
- ◆ **三、地震数据分析的若干方向**
- ◆ **四、结论与讨论**

一、概述

- ◆数据无处不在、数据包含信息、信息产生知识、知识支持决策。
- ◆人类已经进入数据时代。
- ◆数据的基本形式：
 - ◆一维（规则）时间采样数据；
 - ◆高维规则空间采样数据；
 - ◆高维非规则空间采样数据；
 - ◆时间空间高维采样数据；
 - ◆与时空采样没有明显关系的采样数据。

一、概述

◆数据的抽象定义:

- ◆它是客观实体的外在响应的数字记录（可观测量），它一定由客观实体的不同方面的特征（潜变量）决定。

◆数据分析的根本理论基础:

- ◆客观实体的外在响应被视为随机过程，即数据是随机过程。因此，可观测量与潜变量之间至少存在相关关系是数据可分析（值得分析）的根本基础，概率统计是数据分析的根本理论-统计数据分析。

一、概述

- ◆ **数据分析的目的：Learning From Data，抽取其中蕴含的信息。**
- ◆ **数据分析的基本方式：**
 - ◆ **(一维) 时间序列分析；**
 - ◆ **高维规则数据分析；**
 - ◆ **空间散乱数据统计分析；**
 - ◆ **多元统计分析。**
- ◆ **各不同的应用领域又发展出独特的数据分析方式方法，但都是数据分析基本理论下的拓展。**
 - ◆ **譬如，地震数据分析的思想方法与技术，核心问题：弹性参数估计和岩性参数估计。**

◆ 数据分析的基本逻辑是什么？

目录

- ◆ 一、概述
- ◆ 二、数据分析的基本逻辑
- ◆ 三、地震数据分析的若干方向
- ◆ 四、结论与讨论

二、数据分析的基本逻辑

- ◆ 1、数据是研究对象的外在表现，是可观测与可记录的量，它们蕴含了关于研究对象的、某个方面的信息。
- ◆ 2、数据，研究对象的外在的、可观测的量，被认为：是一维的时间序列（当然也可以是其它变量的序列），或高维（ $\geq 2D$ ）的空间数据（也可抽象为一般的高维数据体）。
 - ◆ 还有一大类数据，与时间和空间标度没有明显的关系。
- ◆ 3、一般意义下，为了对数据进行深入分析，把数据视为随机过程（即随机变量按某种顺序排放）。因此，数据分析被纳入在概率统计大理论框架下。
- ◆ 4、一般地，认为数据对应的随机过程是宽（广义）平稳的、零均值的，存在有对应协方差（阵）的。
 - ◆ 宽平稳即随机过程的一阶二阶统计量不变。简言之，均值和方差不变。

二、数据分析的基本逻辑

- ◆ 5、联合概率分布函数完全决定了随机过程（数据）的统计特征。
 - ◆ 但是从应用角度，一般地，不可能给出随机过程（数据）的联合概率分布函数。另外，即便各阶统计量也不方便体现数据中蕴含的信息。因此，数据分析需要对数据（随机过程）进行建模。
- ◆ 6、数据分析，本质上，也可叫Learning from data，到底想从数据中挖掘出什么？
 - ◆ 首先，弄清楚数据由什么特征成分组成的。
 - ◆ 然后，对数据进行建模，或严格地讲是对宽（广义）平稳随机过程进行建模，实现对未观测（也包括已观测）数据的预测。
 - ◆ 再进一步，建立起可观测量与潜变量之间的关系。
 - ◆ 一般地，是用回归分析方法建立起可观测量与潜变量之间的关系。

二、数据分析的基本逻辑

◆7、对数据（随机过程）建模是一个很复杂的问题。其根本思想到底是什么？这些根本思想从何而来？数学家为什么想到了这些建模方法？

◆数学家认为：白噪声 $WN(0, \sigma^2 I)$ 是最简单的随机过程，白噪声的加权叠加可以生成任意的广义平稳随机过程。这是广义平稳随机过程建模的思想基础。

◆ARMA模型据此产生。

◆数学家认为：自然界最简单的波动信号是谐波，谐波的加权叠加可以表达任意的波动信号。

◆Fourier基函数的线性组合表达波动信号据此产生。

◆8、所谓的建模过程就是在用上述模型逼近实测数据时，在最佳逼近的原则下，确定模型中的待定（加权）系数的过程。基于最佳模型，可以实现对以观测和未观测数据的预测。

二、数据分析的基本逻辑

◆9、Fourier基函数的线性组合表达波动信号不等于对广义平稳信号建模

- ◆ ARMA建模是对广义平稳信号建模的方法;
- ◆ Fourier基函数的线性组合表达波动信号是对广义平稳信号建模的具体实现（即样本函数）进行特征表达的方法。不能认为它可以生成或模拟广义平稳信号。
- ◆ 广义平稳信号的样本函数的Fourier变换结果（Fourier系数）也是随机的，其二阶统计量是功率谱。
- ◆ 功率谱与自相关函数是一个Fourier对。
- ◆ 因此，可以通过样本自相关矩阵的正交分解确定广义平稳信号中包含的特征量。这个特征量就是Fourier基函数。这是K-L变换的理论基础。
- ◆ 无论如何，不要把Fourier基函数的线性组合表达波动信号等同于对广义平稳信号进行建模，这样做可以预测广义平稳随机信号。 **Fourier基函数的线性组合只能预测广义平稳信号的样本函数！！！！逻辑关系不能含糊！**

◆10、所谓的建模过程就是在用上述模型逼近实测数据时，在最佳逼近的原则下，确定模型中的**待定（加权）系数**的过程。基于最佳模型，可以实现对以观测和未观测数据的预测。

二、数据分析的基本逻辑

◆11、如何理解FWI与上述数据分析思想的联系？

- ◆ FWI中，线性化正问题 $\delta u^{obs}(\xi, t) \approx G \cdot \delta m(x)$ 中的 G 是由Green函数构成的矩阵，列向量形成基函数（族），基函数的加权系数是待估计的弹性参数（譬如速度扰动）。因此，FWI的弹性参数估计本质上也是个最佳建模问题，最佳模型能最好地解释实测数据（即逼近误差最小）。
- ◆ 可见，勘探地震中的地震波反演成像问题与信号最佳逼近问题内涵是完全一致的！
- ◆ 信号分析与地震波反演成像完全应该统一在一起来处理！

◆12、总而言之，数据分析的核心就是对数据（随机过程）进行建模。基于基函数逼近的建模，也是在探测数据（随机过程）中特征量是什么。特征量就是基函数，加权系数显示该特征量是否是主要特征量。

- ◆ FWI也应该这样理解，可以拓宽对FWI的认识。

二、数据分析的基本逻辑

- ◆13, 对数据（随机过程）进行建模的问题，本质上，都在求解一个Bayes推断问题或Bayes参数估计问题。这是数据分析的最高理论认识。
 - ◆在此认识下，发展各种具体的建模方法技术。
- ◆14、数据分析的根本逻辑：宽（广义）平稳随机过程是对数据的数学抽象，认为宽（或广义）平稳随机过程是由白噪声 $WN(0, \sigma^2 I)$ 线性组合生成的，即ARMA模型可以生成宽（广义）平稳随机过程，这种观点是来自于时间序列分析的。**注意：由 $WN(0, \sigma^2 I)$ 冲击一个线性系统产生的广义平稳信号一定是零均值、方差不变的。**
 - ◆但这也构成了空间（散乱）数据分析的理论基础。即空间数据分析时，也要求空间数据是宽（广义）平稳的，把AR模型推广到高维空间数据分析中就构成了空间数据分析的理论基础。
 - ◆这应该是数据分析的最基本逻辑。其它所谓的高端数据分析方法均是由此推演出来的！
 - ◆但想清这个观点并不容易。

二、数据分析的基本逻辑

◆15、之所以能从数据中挖掘出信息，最根本的逻辑基础是宽（广义）平稳随机过程中各随机变量间存在一定的相关性，即具有一定内在结构的方差矩阵 Σ 的存在。正是各随机变量间存在一定的相关性从而导致协方差阵 Σ 存在特定的结构。这些结构，就是数据中的蕴含的信息。若自协方差阵是单位阵，宽平稳随机过程就是白噪声，其中不包含什么信息。

◆这是数据分析的根本思想逻辑。但是接受这个逻辑也并不容易。

◆16、一维时间序列分析，主要包括：AR模型建立（即由最佳AR模型实现对一维数据的未观测部分的预测）和谱分析（即分析实测数据包含何种特征成分）。

二、数据分析的基本逻辑

- ◆ 17、高维数据分析，同样是这两件事（建模与特征成分分析）。
 - ◆ 但高维规则数据分析和高维散乱数据分析还是有所不同的。
 - ◆ 高维规则数据分析依然是：线性结构成分分析和高维AR模型建立
 - ◆ 由最佳高维AR模型实现对高维数据的未观测部分的预测，譬如高维插值；而对已观测高维数据进行预测，即去噪。
 - ◆ 这是线性信号预测去噪的理论基础。
 - ◆ 高维数据分析中的谱估计等于是方向谱估计或更一般地是线性结构估计。
- ◆ 18、应该注意到：建模与特征成分分析这两件事并不是独立的，可以认为它们是一件事。
 - ◆ 最佳模型就是由若干特征成分线性叠加生成的。

二、数据分析的基本逻辑

◆19、高维散乱空间数据分析的核心任务是：

- ◆由高维AR模型建立，实现对高维空间中未观测数据的预测，就是散乱数据的插值问题，但做这件事的方法被称为Kriging方法。
- ◆为什么又必须创造一个新名字？因为Kriging方法和高维AR模型建模方法还是有明显区别的！
- ◆对于高维散乱空间数据，其协方差阵即使用可观测数据也是无法估算的，另外，高维数据的协方差阵是（高阶）张量，对于实际计算非常不利。因此，引入半变差函数，进一步地，又对半变差函数进行半解释表达，即引入反距离（平方）函数、（各向同性/各向异性）高斯函数等近似地表达半变差函数。最后发展到引入径向基函数构建基函数族来表达高维空间中任意函数的思想与方法。

二、数据分析的基本逻辑

◆20、高维空间散乱数据分析的核心思想：

- ◆空间散乱数据分析，本质上，还是利用一阶、二阶统计量对空间数据的建模问题。空间散乱数据 $Z(s)$ ($Z(s) = \eta(s) + e(s)$) 被分成均值（背景部分， $\eta(s)$ ）+广义平稳随机信号部分（ $e(s)$ ），再加上不可被建模表达的，或不被所建模型预测的高斯白噪声（ $N(0, \sigma^2 I)$ ）。
- ◆空间散乱数据分析中，均值（背景部分），一般不平稳，必须对它建模估计，然后去除，然后才能对广义随机平稳部分 $e(s)$ 建模。但是，最终估计均值 $\eta(s)$ 部分必然受 $e(s)$ 的影响，因此对 $Z(s)$ 进行建模本质上必须同时考虑一阶二阶统计量的影响。
 - ◆以前（地震）信号分析时，总是假设一阶统计量为零，这其实回避了很多问题，零均值假设对于零附近波动的信号是合理的，但对于空间数据(非波动变化的空间数据)并不合理。

二、数据分析的基本逻辑

◆21、高维空间散乱数据分析的核心思想：

- ◆对于空间数据（信号）析，均值等于零（等于一个常数）假设均不合理，它天生就是非平稳信号分析，这是不同于平稳时间序列分析的根本之处。
- ◆当 $Z(s)$ 均值为常数时，可以把它纳入AR模型中，**当成一个参数**进行估计。
- ◆当 $Z(s)$ 均值空变时，**还是要先对均值 $\eta(s)$ 进行一般的函数逼近**，此时最好同时考虑 $e(s)$ 的方差结构对估计 $\eta(s)$ 时产生的影响。
- ◆但是，均值 $\eta(s)$ 在高维空间中一般是非线性的。
- ◆理论上，对 $Z(s)$ 的建模问题，**应提成一个Bayes参数估计问题。**



二、数据分析的基本逻辑

◆22、针对高维规则数据的非线性结构进行表达或建模预测，这是当前数据分析领域中的一个热点及前沿研究方向。

- ◆其基本思想还是明瞭的，依然是借用了微积分的思想，即在局部空间中进行线性特征表达，然后找到一种映射把线性特征表达投影到低维空间中。
- ◆问题是如何找到这种映射！



二、数据分析的基本逻辑

- ◆23、对高维散乱数据中的非线性结构的特征表达与建模预测，目前似乎讨论不多。无论如何，在这些前沿领域做些研究工作，才有产生更大的创新成果的可能。
- ◆24、对高维空间数据中的非线性结构进行分析，人工智能，即神经网络算法，似乎就是在做这个工作，但大量的合格标签如何做？内部的运作机理是什么？非线性结构是如何被神经网络捕捉到的？神经网络如何利用这些非线性结构的？等等，目前似乎都还是一笔糊涂账。



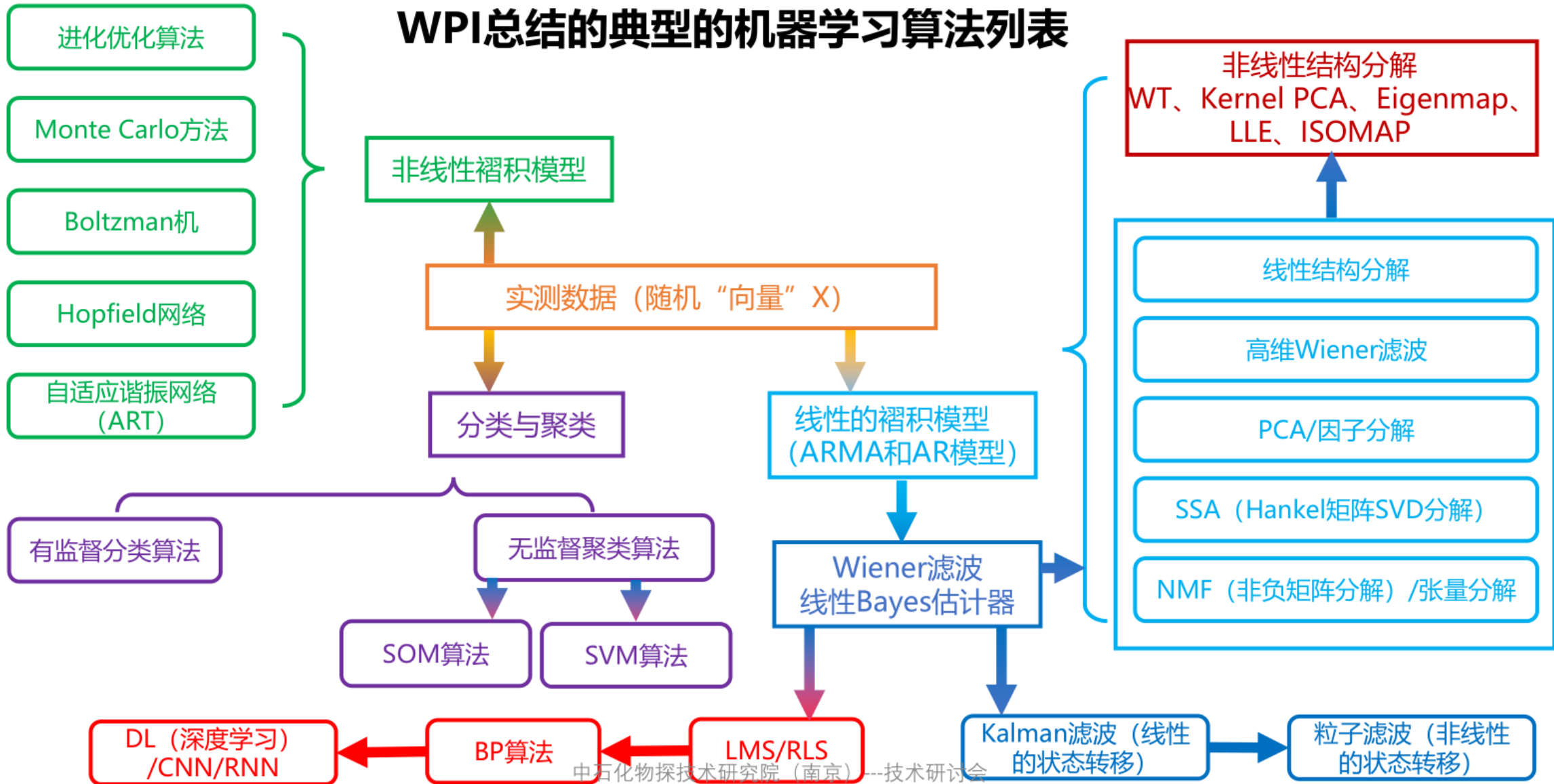
二、数据分析的基本逻辑

- ◆25、再补充一点，多元统计分析是前述数据分析的子集。核心依然是对可观测量进行特征表达及建模，至于可观测量与潜变量之间关系的分析，尤其是因子分析/对应分析/典型相关分析，不过是特征表达基础上的进一步深化而已。
- ◆26、至此，机器学习中的绝大部分算法基本都涉及到了。数据满足平稳线性高斯假设下的数据分析，推进到非平稳，非线性，非高斯假设下的数据分析，是明确的发展方向。
- ◆27、把上述思想观点算法用在不同领域中的不用场景下是一个实践问题。



二、数据分析的基本逻辑

WPI总结的典型的机器学习算法列表



目录

- ◆ 一、概述
- ◆ 二、数据分析的基本逻辑
- ◆ 三、地震数据分析的核心问题
- ◆ 四、结论与讨论

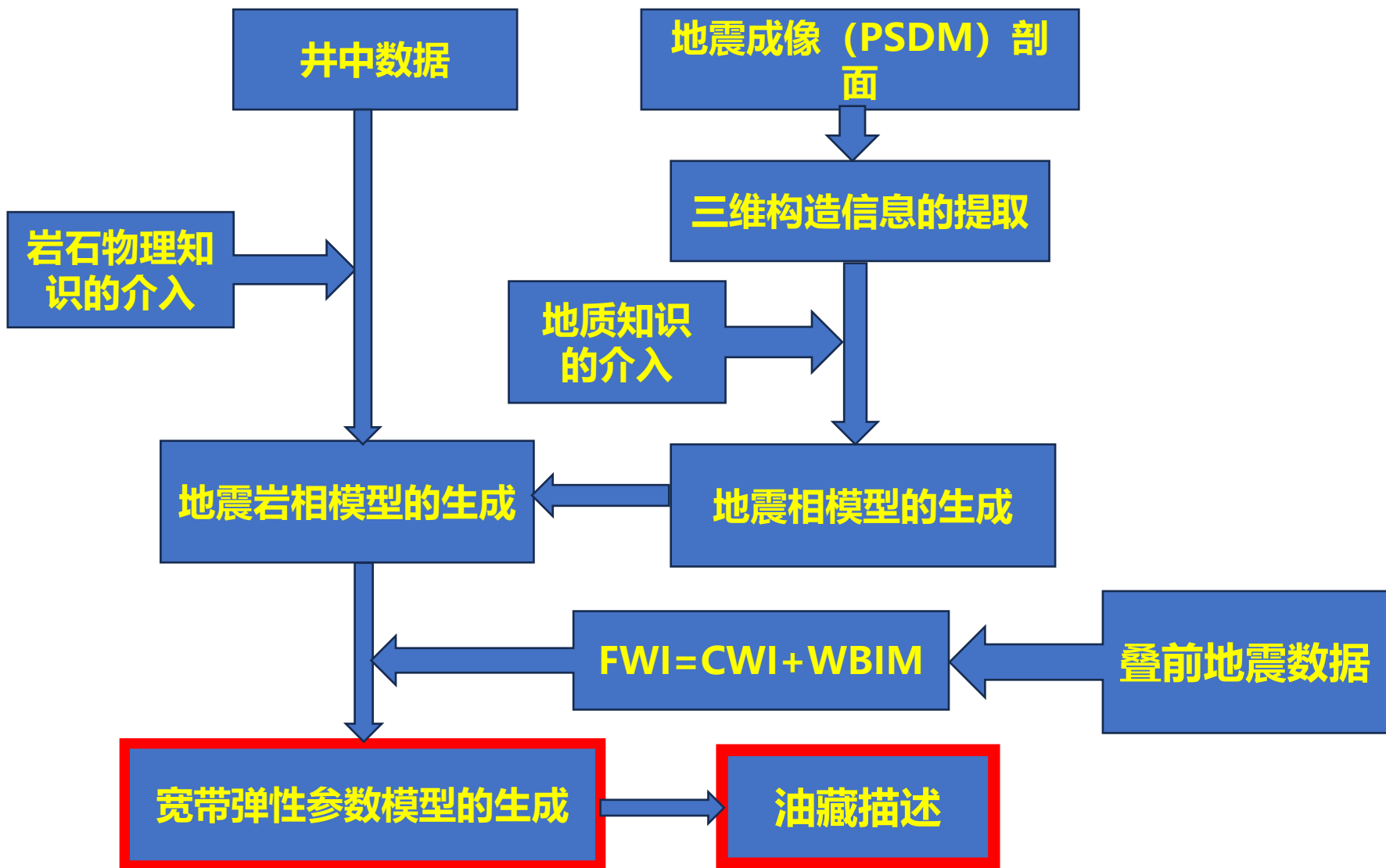
三、地震数据分析的核心问题

◆地震数据分析的三个核

心问题：

- ◆ 1、地震信号（图像）分析；
- ◆ 2、弹性参数反演；
- ◆ 3、弹性参数映射为岩石物性参数。

◆理论上，这三个问题都可归结为：Bayes参数估计问题 / Bayes推断问题。





三、地震数据分析的核心问题

系统参数估计的Bayes理论框架

统计学家的观点

求取后验概率密度分布

$$\rho_M(\mathbf{m} | \mathbf{d}) = \frac{\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})}{\rho(\mathbf{d})} = \frac{\rho(\mathbf{d} | \mathbf{m})\rho(\mathbf{m})}{\rho(\mathbf{d})}$$

求取估计结果的均值和方差

非线性的FWI

$$\hat{\mathbf{m}} = \int \mathbf{m} \rho_M(\mathbf{m} | \mathbf{d}) d\mathbf{m} \quad C_M = \int (\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}})(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}})^T \rho_M(\mathbf{m} | \mathbf{d}) d\mathbf{m}$$

后验概率密度最大化

$$\hat{\mathbf{m}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{m}} \rho_M(\mathbf{m} | \mathbf{d})$$

引入高斯分布假设, 转化为代价函数最小

$$\hat{\mathbf{m}} = \arg \min_{\mathbf{m}} \{S(\mathbf{m})\} = \arg \min_{\mathbf{m}} \left\{ (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}})^T \mathbf{C}_M^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}) + (\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) \right\}$$

数学分析学家的观点

正问题的线性化

$$\mathbf{d}_{\text{obs}} = \mathbf{g}(\mathbf{m}_B + \Delta\mathbf{m}) = \mathbf{g}(\mathbf{m}_B) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{m}} \Delta\mathbf{m} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial \mathbf{m}^2} \Delta\mathbf{m}^2 + \dots$$

$$\Delta \mathbf{d}_{\text{obs}} \approx \mathbf{g}(\mathbf{m}_B + \Delta\mathbf{m}) - \mathbf{g}(\mathbf{m}_B) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{m}} \Delta\mathbf{m}$$

$$\Delta \mathbf{d}_{\text{obs}} = \mathbf{G} \Delta\mathbf{m}$$

线性化的FWI

$$\hat{\mathbf{m}} = \arg \min_{\mathbf{m}} \left\{ (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}})^T \mathbf{C}_M^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}) + (\mathbf{G} \Delta\mathbf{m} - \Delta \mathbf{d}_{\text{obs}})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G} \Delta\mathbf{m} - \Delta \mathbf{d}_{\text{obs}}) \right\}$$

三、地震数据分析的核心问题

◆ Tarentola (1984,1985) 给出的反演成像的理念

◆ 在参数估计理论框架下，尤其是Bayes参数估计理论框架下，实现由观测数据到弹性参数的直接反演。

◆ 反演解的贝叶斯估计 (Tarantola, 1984)

后验概率密度

$$p(\mathbf{m}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}})^T \mathbf{C}_M^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}})] \right\}$$

$$E(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}})^T \mathbf{C}_M^{-1} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}})]$$

误差泛函

三、地震数据分析的核心问题

◆ Tarentola (1984,1985) 给出的反演成像的理念

◆ 牛顿法求解非线性问题

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{m}_0 + \delta\mathbf{m}) &= \mathbf{E}(\mathbf{m}_0) + \delta\mathbf{m}^t \nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{E}(\mathbf{m}_0) + \frac{1}{2} \delta\mathbf{m}^t \mathbf{H} \delta\mathbf{m} + O(|\delta\mathbf{m}|^3) \\ &\approx \mathbf{E}(\mathbf{m}_0) + \delta\mathbf{m}^t \nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{E}(\mathbf{m}_0) + \frac{1}{2} \delta\mathbf{m}^t \mathbf{H} \delta\mathbf{m}\end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{m})}{\partial \mathbf{m}^2} \right|_{\mathbf{m}_0} = \mathbf{G}^t \mathbf{G} + \frac{\partial \mathbf{G}^t}{\partial \mathbf{m}} \Delta \mathbf{d}$$

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)} - \mathbf{H}^{-1(k)} \nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{E}^{(k)}$$

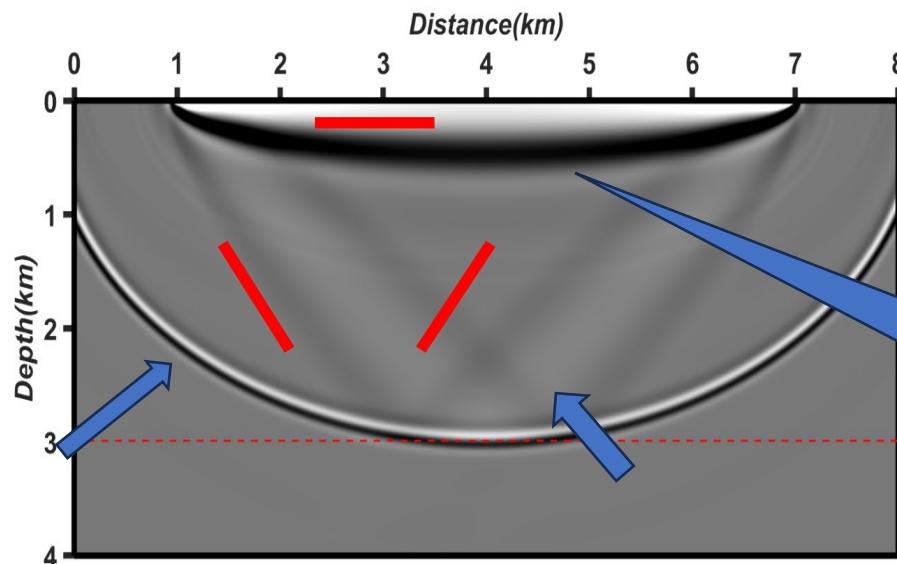
三、地震数据分析的核心问题

◆ Tarentola (1984,1985) 给出的反演成像的理念

◆ 非线性FWI的梯度响应

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)} - \mathbf{H}^{-1(k)} \nabla_{\mathbf{m}} \mathbf{E}^{(k)}$$

Hessian预条件后的
梯度项



梯度的几何形态

三、地震数据分析的核心问题

◆ 实测波场的Born级数表达---理论上, (地表观测的) 透射和反(散)射波场可以用Born级数表达为:

$$\begin{aligned} G(x_r | x_s) &= G_0(x_r | x_s) - \omega^2 G_0 \delta \mathbf{m} G_0 + \omega^4 G_0 \delta \mathbf{m} G_0 \delta \mathbf{m} G_0 + \dots \\ &= G_0 - \omega^2 \int G_0(x_r | \xi) G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) d\xi \\ &\quad + \omega^4 \iint G_0(x_r | \eta) \delta \mathbf{m}(\eta) G_0(\eta | \xi) \delta \mathbf{m}(\xi) G_0(\xi | x_s) d\xi d\eta + \dots \end{aligned}$$

◆ 其中, G_0 代表背景模型 m_0 中的格林函数(对应透射波传播); G 代表真实模型 m 中的格林函数(对应全波场); m 代表慢度平方; $\delta m = m - m_0$ 。

三、地震数据分析的核心问题

◆反(散)射波场可以的Born级数表达

$$\begin{aligned}\delta G(x_r | x_s) &= G - G_0 \\ &= -\omega^2 \int G_0(x_r | \xi) G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) d\xi \\ &\quad + \omega^4 \int G_0(x_r | \eta) \delta \mathbf{m}(\eta) G_0(\eta | \xi) \delta \mathbf{m}(\xi) G_0(\xi | x_s) d\xi d\eta + \dots \\ &= \delta G_1(x_r | x_s) + \delta G_2(x_r | x_s) + \dots\end{aligned}$$

一阶(一次)散
射波

二阶(二次)散
射波

三、地震数据分析的核心问题

◆反（散）射波场的Born线性化：

$$\delta G(x_r | x_s) \approx -\omega^2 \int G_0(x_r | \xi) G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) d\xi$$

◆这就是在地震波偏移成像中广泛应用的Born近似波场表达。应该注意这是积分形式的表达。

◆存在Born近似的微分方程。

三、地震数据分析的核心问题

◆ 逐步线性化反演方法的导出

◆ 透射波FWI的梯度项的导出:

◆ 透射波FWI对应的Frechét微商的定义

$$\delta G_0(\mathbf{x}_r | \mathbf{x}_s) = \delta G_0^{m_0^{initial}}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \delta \mathbf{m}_0(\mathbf{x}) \delta G_0^{m_0^{initial}}(\mathbf{x}_r | \mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \delta G_0(\mathbf{x}_r | \mathbf{x}_s)}{\partial \delta \mathbf{m}_0(\mathbf{x})} = \delta G_0^{m_0^{initial}}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s) \delta G_0^{m_0^{initial}}(\mathbf{x}_r | \mathbf{x})$$

◆ Frechét微商是一个Jacobi矩阵

◆ 透射波FWI的梯度项

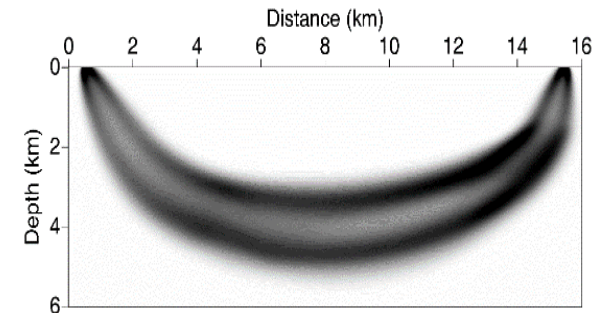
$$E(\mathbf{m}_0) = \frac{1}{2} (G^{obs}(\mathbf{m}_0) - G^{cal}(\mathbf{m}_0))^T (G^{obs}(\mathbf{m}_0) - G^{cal}(\mathbf{m}_0))$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{m}_0} = \left[\frac{\partial \delta G_0(\mathbf{x}_r | \mathbf{x}_s)}{\partial \delta \mathbf{m}_0(\mathbf{x})} \right]^T (G^{obs}(\mathbf{m}_0) - G^{cal}(\mathbf{m}_0))$$

◆ 透射波FWI梯度项的含义

◆ 把残差波场进行沿着波传播路径的反传播。 Frechét微商的共轭算子 (转置矩阵) $\left[\frac{\partial \delta G_0(\mathbf{x}_r | \mathbf{x}_s)}{\partial \delta \mathbf{m}_0(\mathbf{x})} \right]^T$ 就是一个反残差波场的反传播算子。

◆ 透射波FWI的梯度项的几何形状:



三、地震数据分析的核心问题

◆ 逐步线性化反演方法的导出

◆ 反射波FWI的梯度项的导出:

◆ 透射波FWI对应的Frechét微商的定义

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \delta G_2(x_r | x_s)}{\partial \delta \mathbf{m}(x)} &= \frac{\partial}{\partial \delta \mathbf{m}(x)} \left(\omega^4 \iint G_0(x_r | \eta) \delta \mathbf{m}(\eta) G_0(\eta | \xi) \delta \mathbf{m}(\xi) G_0(\xi | x_s) d\xi d\eta \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \delta \mathbf{m}(x)} \left(-\omega^2 \int G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) \left(-\omega^2 \int G_0(x_r | \eta) \delta \mathbf{m}(\eta) G_0(\eta | \xi) d\eta \right) d\xi \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \delta \mathbf{m}(x)} \left(-\omega^2 \int G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) \delta G_1(\xi | x_r) d\xi \right) \\
 &= -\omega^2 G_0(x | x_s) \delta G_1(x | x_r) - \omega^2 \left(\int G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) \frac{\partial \delta G_1(\xi | x_r)}{\partial \delta \mathbf{m}(x)} d\xi \right) \\
 &= -\omega^2 G_0(x | x_s) \delta G_1(x | x_r) + \omega^4 \int G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) G_0(\xi | x) G_0(x | x_r) d\xi \\
 &= -\omega^2 G_0(x | x_s) \delta G_1(x | x_r) + G_0(x | x_r) \omega^4 \int G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}(\xi) G_0(\xi | x) d\xi \\
 &= -\omega^2 G_0(x | x_s) \delta G_1(x | x_r) - \omega^2 G_0(x | x_r) \delta G_1(x | x_s)
 \end{aligned}$$

三、地震数据分析的核心问题

◆ 逐步线性化反演方法的导出

◆ 反射波FWI的梯度项的导出:

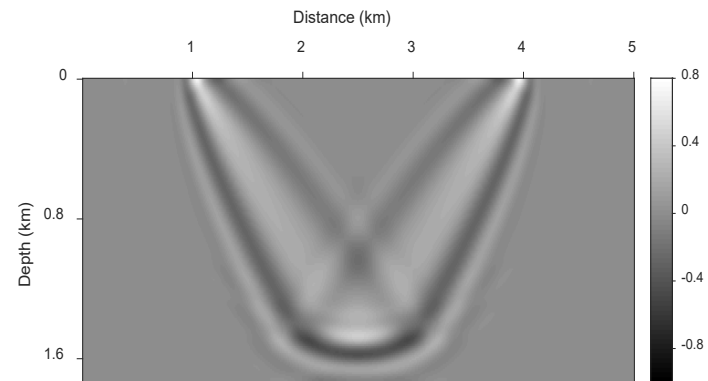
◆ 反射波FWI的梯度项

$$E(\delta \mathbf{m}) = \frac{1}{2} (G^{obs}(\delta \mathbf{m}) - G^{cal}(\delta \mathbf{m}))^T (G^{obs}(\delta \mathbf{m}) - G^{cal}(\delta \mathbf{m}))$$

$$\frac{\partial E(\delta \mathbf{m})}{\partial \delta \mathbf{m}} = \left[\frac{\partial \delta G_2(\mathbf{x}_r | \mathbf{x}_s)}{\partial \delta \mathbf{m}(\mathbf{x})} \right]^T (G^{obs}(\delta \mathbf{m}) - G^{cal}(\delta \mathbf{m}))$$

◆ 反射波FWI梯度项的含义

◆ 把残差波场进行沿着波传播路径的反传播。Frechét微商的共轭算子（转置矩阵） $\left[\frac{\partial G^{cal}(\delta \mathbf{m})}{\partial \delta \mathbf{m}} \right]^T$ 就是一个反残差波场的反传播算子。它包括两部分：炮点到成像点的部分和成像点到检波点的部分。



◆ 反射波FWI的梯度项的几何形状:

三、地震数据分析的核心问题

◆ 逐步线性化反演方法的导出

◆ 估计扰动量 \mathbf{m}_r 的FWI的梯度项的导出:

◆ 估计扰动量 \mathbf{m}_r 的FWI对应的Frechét微商的定义

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta G_1(x_r | x_s)}{\partial \mathbf{m}_r(x)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}_r(x)} \left(-\omega^2 \int G_0(x_r | \xi) G_0(\xi | x_s) \delta \mathbf{m}_r(\xi) d\xi \right) \\ &= -\omega^2 G_0(x_r | x) G_0(x | x_s) \end{aligned}$$

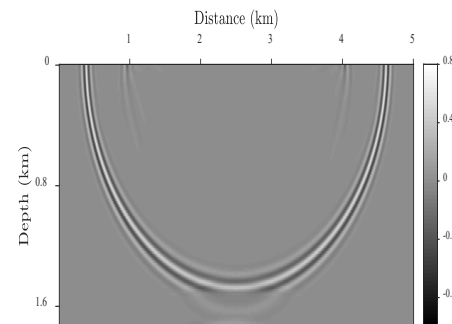
◆ 估计扰动量 \mathbf{m}_r 的FWI对应的梯度项:

$$E(\mathbf{m}_r) = \frac{1}{2} (G^{obs}(\mathbf{m}_r) - G^{cal}(\mathbf{m}_r))^T (G^{obs}(\mathbf{m}_r) - G^{cal}(\mathbf{m}_r))$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{m}_r)}{\partial \mathbf{m}_r} = \left[\frac{\partial \delta G_1(x_r | x_s)}{\partial \mathbf{m}_r(x)} \right]^T (G^{obs}(\mathbf{m}_r) - G^{cal}(\mathbf{m}_r))$$

◆ 梯度项的几何含义:

◆ 把残差波场投影到等时面上。因此有对应的梯度项的几何形态。





三、地震数据分析的核心问题

◆当前地震波反演成像技术进展：

- ◆ 1、九九归一，地震波成像技术已经归结为FWI。这是地震波成像（也是所有广义遥感成像）的最高理论表达。
 - ◆ 尽管日常的地震数据成像处理还远没有达到这样的阶段。但是地震波成像理论方法研究已经归结在FWI上了。
- ◆ 2、FWI背景速度建模的理论方法研究基本接近尾声。余下的是理论方法的实用化和软件化。
 - ◆ 尽管陆上FWI背景速度建模还很少成功应用案例，但这不是理论方法问题，主要是数据的问题。
- ◆ 3、目前，FWI的技术发展重点已经聚焦在如何正确地估计弹性参数的高波数扰动量。
 - ◆ 高波数部分的估计，各家（CGG、SLB、TGS、PGS、DUG等等）有各家的做法，但殊途同归。FWI Imaging最近几年已经发展到FDR（FWI Derived reflectivity），为了后续考虑AVA效应，今年开始转向了FDR Gathers的生成。
- ◆ 4、弹性波FWI，有较多文章讨论，但是成功的应用还不多。
 - ◆ 问题应该还是出在数据上。弹性波FWI理论方法本身是很完美的。



三、地震数据分析的核心问题

◆当前地震波成像技术进展:

- ◆ **CGG**: TL-FWI + **FWI-Imaging**
- ◆ **SLB**: ETM-FWI + **FWI-Imaging**
- ◆ **TGS**: DM-FWI + **FWI-Imaging**
- ◆ **PGS**: 速度+矢量反射系数同时反演
- ◆ **DUG**: MP-FWI

2024年最新进展



- ◆ **CGG (VIRIDIEN)** : TL-FWI + **FWI Derived angle reflectivity**
- ◆ **SLB**: ETM-FWI + **FWI Derived reflectivity (FDR) Gathers**
- ◆ **TGS**: DM-FWI + **FWI-Imaging angle gathers**
- ◆ **BP**: FDR Angle Gathers
- ◆ **PGS**: 速度+矢量反射系数同时反演
- ◆ **DUG**: MP-FWI

CGG: 全数据反演速度 v , Gardner公式获得密度 ρ , 将叠前数据划分不同角度数据 (near 5°-15°, mid 15°-25° and far 25°-35°), 反演不同模型 $I_i \rightarrow$ 求导转换为角度反射系数

SLB: 利用全数据反演速度模型 V , 将叠前数据划分不同的偏移距数据 d_i , 反演不同密度模型 $\rho_i, V\rho_i \rightarrow$ 求导获得道集

TGS: 叠前数据划分不同的角度组 (10 degrees bands) \rightarrow 反演速度 \rightarrow 求导获得FWI images (获得不同角度成像)

BP: 全数据+速度 \rightarrow 伴随源产生梯度 \rightarrow 梯度分解 $Grad(\mathbf{x}, \theta, \varphi) \rightarrow vel(\mathbf{x}, \theta, \varphi) \rightarrow$ 求导获得FDR 角度道集。

都从变密度声波方程出发:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2 t} - v^2 \rho \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = S$$

PGS: $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 t} - [v^2 \nabla^2 P + v \nabla v \cdot \nabla P - 2R^0 \cdot v^2 \nabla P] \approx S$ $R^0 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \approx \frac{1}{2} \frac{d_z Z}{Z}$
速度 v +矢量反射系数 R^0 同时反演 $\nabla Z = i \cdot d_x Z + j \cdot d_y Z + k \cdot d_z Z$

AspenTech (Yilmaz): $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P}{\partial^2 t} = \nabla^2 P + (g+m) \nabla P$ $g = 2 \nabla V / V$
反演反射系数 m $m = 2 \rho V / (\rho V)$

DUG $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} + \nabla r_i \cdot \nabla u - \nabla^2 u = \rho s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ $R(\theta=0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \approx \frac{1}{2} (\nabla(\log c + \log \rho))$
速度 c +反射系数 r 同时反演
速度 c +反射系数 r , AVA参数反演 $= \rho s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

三、地震数据分析的核心问题

◆当前地震波成像技术进展的评价：

- ◆地震波反演成像是整个勘探地震领域中的核心环节。
- ◆地震波反演成像的根本目标是估计宽“或全”波数带的（或高精度的、定量的）地下介质弹性参数场（最好是纵横波阻抗），这是一个Bayes参数估计问题；更具体地，这是一个广义线性反演问题。
- ◆地震波反演成像是Bayes参数估计问题在勘探地震中的一个应用实例。
- ◆反演成像的本质：由直接观测量 \mathbf{d}^{obs} 估计与直接观测量 \mathbf{d}^{obs} 有关的潜变量 \mathbf{m} 。
- ◆最根本的假设：正问题的解 $\mathbf{d}^{cal} = \mathbf{G}(\mathbf{m})$ 能模拟直接观测量 \mathbf{d}^{obs} 。正问题尽可能是线性的。
- ◆但是，深水深层复杂介质等复杂场景下的地震波反演成像是一个强非线性反问题。目前的FWI，尤其是反射波FWI和高波数参数FWI还是很难给出稳定的、高精度的、定量的反演成像结果。因此尚不能满足高精度油藏描述的需求。

三、地震数据分析的核心问题

◆弹性参数映射为岩石物性参数：

- ◆不存在类似波动方程的正问题，描述储层物性参数（譬如孔隙度、渗透率、饱和度、裂缝密度与方位、岩石脆性、含油气性等等）与（实测）波场之间的因果关系。不可能进行类似FWI的岩性参数反演。
- ◆用储层描述、或储层刻画、或储层评价，而不是储层反演的名字，已经说明了储层描述问题不可能有像地震波反演成像问题的解决途径。储层描述问题是一个基于信息综合的最佳决策问题。
- ◆储层描述问题的核心是各种信息的提取。储层描述的关键信息是由广义地震波成像技术提供的宽带弹性参数（弱旁瓣反射系数+宽带阻抗）成像结果。测井信息是储层描述的另一个关键信息。

三、地震数据分析的核心问题

◆如何进行弹性参数向岩性参数的映射？ -基本的理论框架应该依然是Bayes

决策/推断：

- ◆ 假设储层岩性参数（岩石骨架成分、孔隙度、渗透率）为 m ；弹性参数为 μ ；实测波场为： d ，它们之间的联合概率密度为（Tarantola,2005）：

$$\Theta(d, \mu, m) = \theta(d | \mu, m) \theta(\mu | m) \mu_M(m)$$

- ◆ 上式的合理表达为：

$$\Theta(d, \mu, m) = \theta(d | \mu) \theta(\mu | m) \mu_M(m)$$

如何具体实现？

- ◆ 理论上，联合概率密度函数的最大化，可以作为储层岩性参数和弹性参数估计的准则。
- ◆ 其中， $\theta(\mu | m)$ 代表储层岩性参数和弹性参数之间的相互依赖关系---岩石物理关系。到目前为止，这个依赖关系是不确定的。大量的岩心实验、分析结果未必能确认这个关系的具体形式。实际工作中也是不现实的。不可能获得如此大量的岩心和实验室测试分析数据。 $\theta(d | \mu)$ 代表实测波场与弹性参数之间的关系，各种波动方程代表了这种关系。这种关系基本是认可的。是否需要更符合物理实际的波动方程？

目录

- ◆ 一、概述
- ◆ 二、数据分析的基本逻辑
- ◆ 三、地震数据分析的核心问题
- ◆ 四、结论与讨论

四、结论与讨论

- ◆人类社会已经进入数据分析的时代。
- ◆每个领域有自己的数据分析问题和特色的数据分析方法。
- ◆数据被视为随机的，基于概率统计理论进行数据分析，在Bayes估计、推断、判决的逻辑框架下进行数据分析，用深度神经网络进行非线性信息的深度挖掘，是数据分析的框架性思维模式。
- ◆关键是如何把数据分析的基本逻辑拓展应用在所从事的领域中很好地解决实际问题。



谢谢
欢迎批评指正